

Invariance de jauge du Lagrangien

$$L' = L + \frac{dF(\{q_i\}, t)}{dt}$$

pas de $\{\dot{q}_i\}$

Invariance de jauge et les changements de référentiel (1D pour simplicité)

$\left\{ \begin{array}{l} x = f(x', t') \\ t = t' \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \text{le temps est} \\ \text{absolu} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{il faut la relativité} \\ \text{pour généraliser} \end{array} \right)$

$\rightarrow$ si on croit qu'il y a une façon d'observer dans un référentiel et de traduire les observations dans un autre, il faut une relation mathématique entre les coordonnées.

Disons que

$$L(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}, t) = L(\{f(x'_i, t)\}, \left\{\frac{d}{dt} f(x'_i, t)\right\}, t)$$

$\downarrow$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} V(x_i - x_j) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\frac{d}{dt} f(x'_i, t) \right]^2 + \\ - \frac{1}{2} \sum_{ij} V(f(x'_i, t) - f(x'_j, t))$$

On va calculer explicitement la partie cinétique :

$$\left[\frac{d}{dt} f(x', t) \right]^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x'} \dot{x}' + \frac{\partial f}{\partial t} \right]^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right)^2 \dot{x}'^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial t} \dot{x}' + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}'_i^2 \left(\frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial x'_i} \right)^2 + 2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial x'_i} \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial t} \dot{x}'_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial t} \right)^2$$

Rappelez vous la forme plus générale de la première loi de Newton : les lois de la physique sont les mêmes dans différents référentiels.

→ se traduit en : le lagrangien est le même.

$$L(\{x'_i\}, \{\dot{x}'_i\}, t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}'_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} V(x'_i - x'_j)$$

Si on compare, on a que

$$\left(\frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} = \pm 1$$

donc

$$f(x', t) = \pm x' + \underbrace{g(t)}$$

→ fonction seulement de t de façon que sa dérivée par rapport à x' soit nulle.

Cette forme déjà comble la requête pour le potentiel :

$$\begin{aligned}
 V(f(x'_i, t) - f(x'_j, t)) &= V(\pm x'_i + g(t) - (\pm x'_j + g(t))) = \\
 &= V(\pm (x'_i - x'_j)) = V(x'_i - x'_j)
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 si ne dépend pas
 de l'ordre
 (on y revient après)

On a encore à gérer le terme

$$2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial x'_i} \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial t} \dot{x}'_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial t} \right)^2$$

Et grâce à l'invariance de jauge, on sait que si ce terme est une dérivée totale par rapport au temps, il ne joue aucun rôle.

En utilisant $f(x', t) = \pm x' + g(t)$, on a

$$\pm 2 \sum_i \frac{1}{2} m_i g'(t) \dot{x}'_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i [g'(t)]^2$$

$g'(t) = \frac{dg(t)}{dt}$

ce terme est une fonction uniquement de temps.
 Donc on peut toujours le voir comme dérivée totale de sa primitive

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i [g'(t)]^2 = \frac{d}{dt} \int_0^t \sum_i \frac{1}{2} m_i [g'(t')]^2 dt'$$

et il ne dépend pas de la forme de $g(t)$

cette partie est plus compliquée à traiter

On regarde, de façon indépendante de l'indice :

$$\ddot{x}' \frac{dg(t)}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} (g(t) \dot{x}')}_{\text{ce terme est à nouveau de la bonne forme}} - \underbrace{\frac{d^2 g(t)}{dt^2} \cdot x'}_{\text{ce terme est un peu déroutant}}$$

→ pour s'en débarrasser il faut que $\frac{d^2 g}{dt^2} = 0$

qui nous donne $g(t) = vt + X_0$

Si finalement on remet tous ensemble, on a

$$x = \underbrace{\pm x'}_{\substack{\text{choix de} \\ \text{l'orientation} \\ \text{d'un référentiel par rapport à l'autre}}} + \underbrace{X_0}_{\substack{\text{changement de l'origine d'un référentiel par} \\ \text{rapport à l'autre}}} + \underbrace{vt}_{\substack{\text{déplacement relatif à vitesse} \\ \text{constant}}}$$

Il s'agit de référentiels galiléens l'un par rapport à l'autre !

Donc on voit la première loi de Newton : on demande que les lois soient les mêmes (même Lagrangien) et seulement les référentiels galiléens sont bons !

Observation : la linéarité de la transformation par se qui concerne les parties spatiales et temporelles garantit que un potentiel invariant par translations garde la même forme.

Principe de moindre action et symétries

THEOREME DE NOETHER (1915 - 1918)

Définissons un changement des coordonnées généralisées qui dépende d'un seul paramètre :

$$q_i \longrightarrow q_i(s)$$

↑

s paramètre

la forme de la dépendance
n'est pas importante

Si le Lagrangien ne dépend pas de s, alors il y a une quantité conservée

$$C = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial s}$$

Pour le prouver on utilise l'action :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i(s)\}, \{\dot{q}_i(s)\}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt$$

↑
car L ne dépend pas de s

donc, si on dérive par rapport à s, on a

$$\frac{dS}{ds} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{d\dot{q}_i(s)}{ds}}_{\text{on le traite par parties}} \right\} dt = \underbrace{\frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt}_{=0}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \right) dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \right) \frac{dq_i(s)}{ds} dt = 0$$

On met ensemble les intégrales

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(s)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \right\} \frac{dq_i(s)}{ds} dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Eq. de Lagrange!
 $\Rightarrow = 0$

Donc, finalement, on a

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \Big|_{t_2} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \Big|_{t_1} = 0$$

Autrement dit, vu que t_1 et t_2 sont arbitraires, on a que

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \quad \text{doit être une constante.}$$

Exemple

- Coordonnées cyclique : si q_i est cyclique, la transformation

$$q_j \rightarrow q_j \quad j \neq i$$

$$q_i \rightarrow q_i + \alpha s$$

(α sert à arranger les éventuelles unités de mesure, mais est une constante)

ne change pas le Lagrangien, et donc

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j(s)} \frac{dq_j}{ds} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j(s)} \delta_{ij} \cdot \alpha = \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} = \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

est une quantité conservée, et puisque α est une constante,

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ est une quantité conservée.

car

$$\frac{dq_i(s)}{dt} = \dot{q}_i + \underbrace{\frac{d}{dt}(\alpha s)}_0$$

• Translation :

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + s \hat{u} \quad \forall_i$$

toutes les coordonnées sont
translées dans la même
direction $\hat{u}$ d'une quantité s

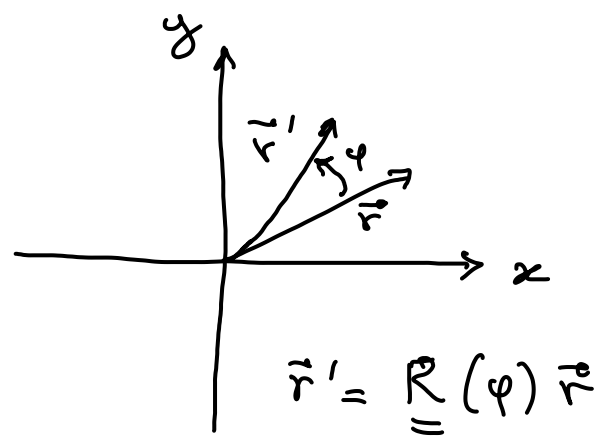
$$\Rightarrow C = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \frac{d \vec{r}_i(s)}{ds} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \hat{u} = \vec{P} \cdot \hat{u}$$

Donc, si le Lagrangien est symétrique (ne change pas)
par rapport à une translation dans la direction $\hat{u}$, alors
la composante selon $\hat{u}$ de l'impulsion totale est conservée.
Si on trouve trois directions indépendantes telles que Noether
s'applique individuellement à chacune, alors $\vec{P}$ est
conservé dans toutes ses composantes

• Rotation dans le plan xy

La matrice de rotation est

$$\underline{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



$\mathcal{L}$ ne dépend pas de φ si :

$V(\{\vec{r}_i\})$ représente de forces centrales et/ou
les potentiels entre les particules dépendent
seulement de leurs distances ($\underline{R}$ est orthogonale
et donc ne change pas les distances :

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|$$

De plus, $\dot{\vec{r}}'_i = \underline{R} \dot{\vec{r}}_i$ et

$$\dot{\vec{r}}_i^2 = \dot{\vec{r}}_i^T \cdot \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i'^T \underbrace{\underline{R}^T \underline{R}}_{\substack{\text{I car } \underline{R} \text{ orthogonale}}} \dot{\vec{r}}'_i = \dot{\vec{r}}_i'^2 = (\dot{\vec{r}}_i(\varphi))^2$$

Donc l'énergie cinétique ne change pas suite à la rotation.

Donc on peut appliquer le théorème de Noether par rapport à φ :

$$C = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}'_i} \frac{d \dot{\vec{r}}'_i}{d\varphi} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i'^T \underbrace{\underline{R}'(\varphi)}_{\frac{d}{d\varphi} \underline{R}(\varphi)} \cdot \vec{r}_i = \sum_i \dot{\vec{r}}_i'^T \underline{R}^T \underline{R}' \vec{r}_i$$

Qui est $\underline{R}^T \cdot \underline{R}'$?

$$\underline{R}^T \cdot \underline{R}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$C = \sum_i \left\{ (\dot{x}_i, \dot{y}_i) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \sum_i (\dot{y}_i, -\dot{x}_i) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \sum_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_i l_{zi} =$$

$$= L_z$$

↑ moment cinétique totale autour de l'axe z

Donc, la symétrie par rotation autour de l'axe z implique la conservation de la composante z du moment cinétique totale.

Conservation de l'hamiltonien pour un système isolé

Un système est dit isolé lors que le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

NOTA : on a une symétrie par translation temporelle, donc par Noether on peut s'attendre une quantité conservée. C'est le cas, mais passer par Noether est compliqué car le temps joue un rôle privilégié dans l'action. On va le montrer autrement.

On dérive L par rapport au temps

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$= 0$ car le système est isolé

$$\sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \right\}$$

Donc

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_i$$

eq. de Lagrange
 $\Rightarrow = 0$

Donc

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0$$

L'hamiltonien du système est défini comme

$$h = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad \text{et il est conservé pour un système isolé.}$$

Qui est l'hamiltonien ?

En coordonnées cartésiennes, $L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{p}_i$$

$$\Rightarrow h = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V \right) =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V$$

h est l'énergie totale !

Techniquement, h n'est pas nécessairement l'énergie totale, mais en réalité il l'est le plus grand nombre de fois.

